Aufnahmeprüfung Mathematik

Januar 2024

Teil 2 – Dauer: 180 Minuten

Die Aufnahmeprüfung Mathematik schriftlich besteht aus zwei Teilen:
Teil 1 – 60 Minuten (Kurzaufgaben) und
Teil 2 – 180 Minuten (Textaufgaben)

---

mit Lösungen

Zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner
  (Texas Instruments TI-30 eco RS oder Casio FX-82 oder Casio FX-82 Solar II)
- Formelsammlung
  („Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik - Physik - Chemie“, Orell Füssli Verlag, deutsch oder englisch)

Wichtig:

• Dieser zweite Prüfungsteil dauert 180 Minuten und umfasst 5 Aufgaben.
• Alle Antworten müssen begründet werden, d.h. Resultate ohne ersichtlichen Lösungsweg werden nicht bewertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total
maximale Punktzahl	8	6	8	9	9	40
erreichte Punktzahl						

Teil 2

1. **[Total 9 Punkte]**

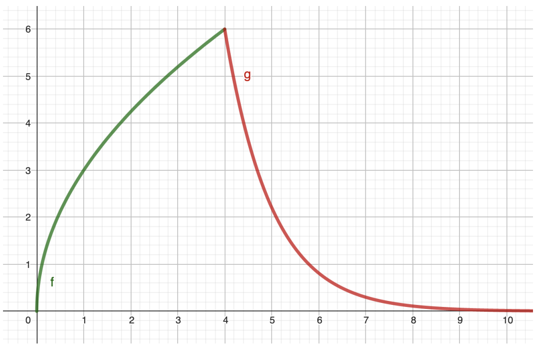
(a) **[1 Punkt]**

Der Graph der Funktion $g(x) = b \cdot e^{ax}$ geht durch die Punkte $P = (4,6)$ und $Q = (5, \frac{6}{e})$. Bestimmen Sie a und b.

- Bitte exakte Resultate für a und b, keine Approximationen.
- Wenn Sie die Parameter a und b nicht bestimmen können, rechnen Sie in den folgenden Teilaufgaben mit $g(x) = 6e^4 \cdot e^{-x}$ weiter.

(b) **[2 Punkte]**

Der Graph von $f(x) = 3\sqrt{x}$ schneidet den Graphen von g aus Teilaufgabe (a) im Punkt $P = (4,6)$.



Bestimmen Sie den spitzen Schnittwinkel $\varphi \leq 90°$ der beiden Graphen im Punkt P.

- Resultat bitte auf zwei Nachkommastellen runden.

(c) **[3 Punkte]**

Der Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g und der x-Achse über dem Intervall $[0,c]$ habe den Wert d. Bestimmen Sie das rechte Intervallende c in Abhängigkeit von d für den Fall $c \geq 4$. Welche Werte sind für den Flächeninhalt d möglich?

- Bitte exakte Resultate angeben, keine Approximationen. Dies gilt auch für die nächste Teilaufgabe (d).

(d) **[3 Punkte]**

Das von den Graphen von f (im Intervall $[0,4]$) und von g (für $x \geq 4$) sowie der x-Achse begrenzte (sich ins Unendliche ausdehnende) Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Lösung:

(a) Einsetzen der Punkte P und Q in die Funktionsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} 6 &= be^{4a} && (1) \\ 6e^{-1} &= be^{5a} && (2) \end{aligned}$$

Teilt man (2) durch (1), so erhält man $e^{-1} = e^a$ und damit $a = -1$. 0.5 P
Einsetzen von $a = -1$ in (1) ergibt $6 = be^{-4}$ und folglich $b = 6e^4$. 0.5 P

(b) Ableiten von f und g ergibt $f'(x) = -6e^4e^{-x}$ und $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$. Mit $x = 4$ erhält man $f'(4) = m_1 = -6$ und $g'(4) = m_2 = \frac{3}{4}$. 1 P

Für den Schnittwinkel φ ergibt sich damit (siehe Formelsammlung, S. 101):

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-6 - \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{2}}\right| = \frac{27}{14} \implies \varphi \approx 62.59°$$

1 P

(c) Für den Flächeninhalt d über dem Intervall $[0, c]$ mit $c \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned} d &= \int_0^4 3x^{1/2}\,dx + \int_4^c 6e^{4-x}\,dx \\ &= 3\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - 6\left[e^{4-x}\right]_4^c \\ &= 16 - 6(e^{4-c} - 1) \\ &= 22 - 6e^{4-c} \end{aligned}$$

1 P

Auflösen nach c ergibt das rechte Intervallende in Abhängigkeit von d:

$$\begin{aligned} 6e^{4-c} &= 22 - d \\ e^{4-c} &= \frac{11}{3} - \frac{d}{6} \\ 4 - c &= \ln\left(\frac{11}{3} - \frac{d}{6}\right) \\ c &= 4 - \ln\left(\frac{11}{3} - \frac{d}{6}\right) \end{aligned}$$

1 P

Welche Werte kann d annehmen? Es gilt:

$$\lim_{c\to\infty} d(c) = \lim_{c\to\infty}\left(22 - 6e^{4-c}\right) = 22.$$

Alternativ: Die Gleichung für c ist erfüllbar, wenn der Term im Logarithmus positiv ist, also wenn

$$\begin{aligned} \frac{11}{3} - \frac{d}{6} &> 0 \\ d &< 22 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt kann also Werte im halboffenen Intervall $[16, 22)$ annehmen. 1 P

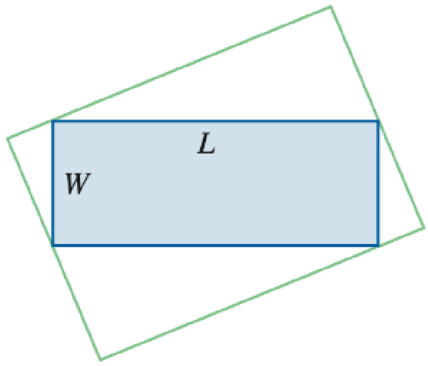
(d) Der Rotationskörper hat das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(3\sqrt{x}\right)^2 \, dx + \pi \int_4^\infty \left(6e^{4-x}\right)^2 \, dx & 1P \\ &= \pi \int_0^4 9x \, dx + \pi \int_4^\infty 36e^{8-2x} \, dx \\ &= \pi \left[\frac{9x^2}{2}\right]_0^4 + \pi \left[-18e^{8-2x}\right]_4^\infty & 1P \\ &= 72\pi - 18\pi \lim_{R\to\infty} \left(e^{8-2x}\right) + 18\pi \\ &= 90\pi & 1P \end{aligned}$$

2. **[5 Punkte]**

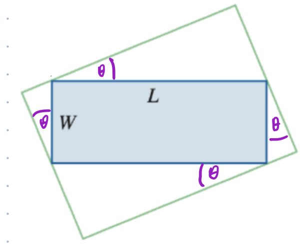
Finden Sie den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks, mit welchem man ein gegebenes Rechteck mit den Seitenlängen L und W umschreiben kann.

- Hinweis: Drücken Sie den Flächeninhalt mit Hilfe eines Winkels θ aus.
- Vergessen Sie nicht den Nachweis, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.



Lösung:

Man wähle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ wie in der Figur rechts.



Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann:

$$
\begin{aligned}
A(\theta) &= (W\cos\theta + L\sin\theta)(W\sin\theta + L\cos\theta) \\
&= (W^2 + L^2)\sin\theta\cos\theta + WL(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= WL + \frac{W^2 + L^2}{2}\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

2 P

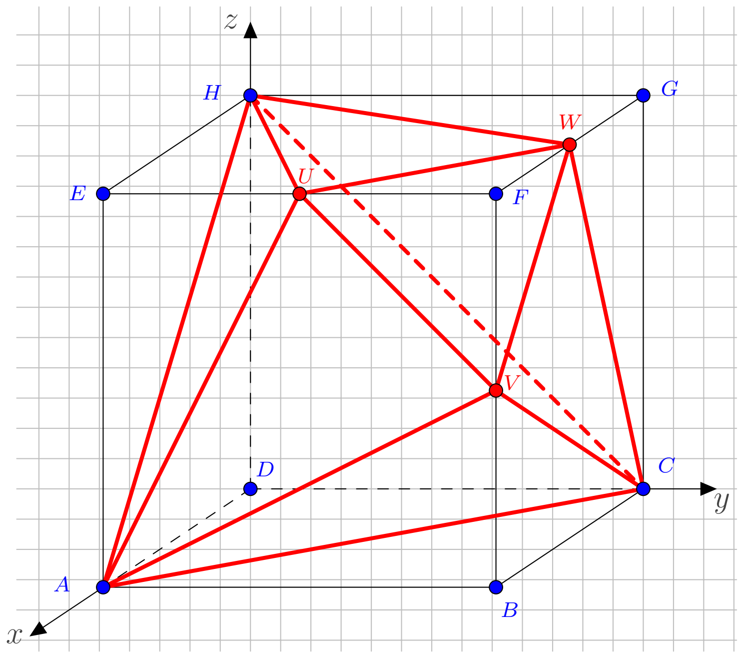
Der Flächeninhalt wird extremal, falls $A'(\theta) = (W^2 + L^2)\cos 2\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$. 1 P

Er wird tatsächlich maximal wegen $A''(\theta) = -2(W^2 + L^2)\sin 2\theta$ und $A''(\frac{\pi}{4}) < 0$. 1 P

Der maximale Flächeninhalt ist dann $WL + \frac{W^2+L^2}{2} = \frac{1}{2}(W + L)^2$. 1 P
(Bem: Dieser Ausdruck entspricht $2M^2$, dabei ist M der Mittelwert von W und L.)

3. **[Total 9 Punkte]**

Die Figur rechts zeigt einen Körper mit den Ecken A, C, H, U, V und W in einem Würfel der Seitenlänge 1. Die Punkte A, C, H stimmen mit Würfelecken überein, die Punkte U, V, W liegen jeweils auf Mittelpunkten von Würfelkanten.



(a) **[1 Punkt]**

Schneidet man das Dreieck EBG mit dem Körper $ACHUVW$, so erhält man ein Sechseck. Zeichnen Sie dieses Sechseck in die Figur oben ein und schattieren Sie es.

(b) **[2 Punkte]**

Bestimmen Sie den Schnittpunkt M der Geraden AV und EB durch eine Rechnung. Durch eine Symmetrieüberlegung kann man dann die Koordinaten der Schnittpunkte L von AU und EB und N von CV und BG erhalten. Wie lauten sie?

(c) **[2 Punkte]**

Wie lang sind die Sechseckseiten ML und MN und welchen Winkel schliessen sie ein? Was können Sie daraus über das Sechseck schliessen?

(d) **[2 Punkte]**

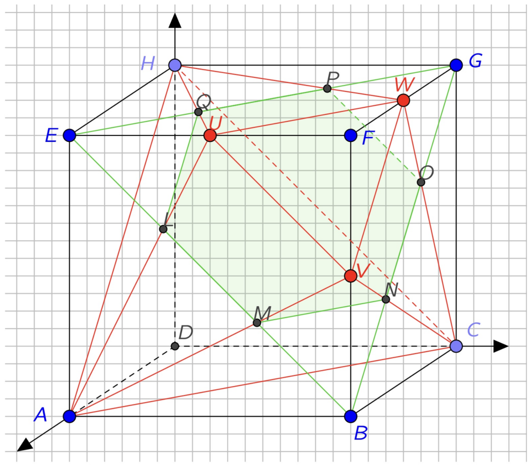
Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, welche die Seitenfläche ACV enthält.

(e) **[2 Punkte]**

Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfusspunktes F_H von H auf ACV. Was können Sie geometrisch aus der Lage von F_H über die Lage der Seitenflächen ACV und ACH zueinander schliessen?

Lösung:

(a) 1 P



(b) Schneiden der Geraden AV und EB führt auf die Vektorgleichung

$$\langle 1,0,0\rangle + r\langle 0,1,0.5\rangle = \langle 1,0,1\rangle + s\langle 0,1,-1\rangle$$

Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt $r = s = \frac{2}{3}$ und also $M = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 1.5 P

Aus Symmetriegründen folgt $L = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ und $N = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$. 0.5 P

(c) Beide Vektoren $\overrightarrow{ML} = \left\langle 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle$ und $\overrightarrow{MN} = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\rangle$ haben die Länge $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 0.5 P

Sie schliessen wegen $\cos\varphi = \frac{-1/9}{2/9} = -\frac{1}{2}$ den Winkel $\varphi = 120°$ ein. 1 P

Aus Symmetrieüberlegungen ergibt sich daraus, dass das Sechseck regulär ist. 0.5 P

(d) Ein Normalenvektor der Ebene ist

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AV} = \langle -1,1,0\rangle \times \langle 0,1,0.5\rangle = \langle 0.5,0.5,1\rangle \quad || \quad \langle 1,1,-2\rangle$ 1*P*

Einsetzen von A in $x + y - 2z = d$ ergibt die Ebenengleichung $x + y - 2z = 1$. 1 P

(e) Schneiden der Ebene aus (d) mit der Geraden $\langle x,y,z\rangle = \langle 0,0,1\rangle + t\langle 1,1,-2\rangle$ führt auf

$$t + t - 2(1-2t) = 1 \implies t = \frac{1}{2} \implies F_H = \langle 0.5, 0.5, 0\rangle$$

1.5 P

Der Lotfusspunkt F_h liegt in der xy-Ebene und damit auf der Schnittgeraden AC der Seitenfläche AHC und ACV. Diese beiden Seitenflächen stehen also senkrecht aufeinander. 0.5 P

4. **[Total 9 Punkte]**

Eine Urne enthält ausschliesslich rote und weisse Kugeln, welche zufällig gezogen werden.

(a) **[1 Punkt]**
Die Urne enthalte zu Beginn 20 rote und 80 weisse Kugeln. Man notiert von jeder gezogenen Kugel die Farbe und legt sie sofort wieder zurück. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 7 gezogenen Kugeln mehr als 4 weiss sind.

(b) **[2 Punkte]**
Diesmal befinden sich 10 rote und 5 weisse Kugeln in der Urne und es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine weisse Kugel erscheint.

(c) **[2 Punkte]**
In der Urne befinden sich insgesamt 16 Kugeln. Zwei gleichzeitig gezogene Kugeln sind mit Wahrscheinlichkeit 55% beide weiss. Wie viele weisse Kugeln sind in der Urne?

(d) **[2 Punkt]**
In der Urne sind doppelt so viele weisse wie rote Kugeln. Wie oft (mindestens) muss eine Kugel aus der Urne gezogen werden (sie wird anschliessend jeweils wieder zurückgelegt), damit die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens eine rote Kugel erscheint, grösser als 99.9% ist?

(e) **[2 Punkte]**
Schliesslich befinden sich 2 rote und 3 weisse Kugeln in der Urne. Bei einem Glücksspiel wird so lange eine Kugel der Urne entnommen (und beiseite gelegt), bis erstmals eine rote Kugel erscheint. Berechnen Sie die zu erwartende Anzahl Ziehungen bei diesem Spiel.

Lösung:

(a) Mit der Binomialverteilung erhält man 1 P

$$p = \binom{7}{5} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2 + \binom{7}{6} \cdot 0.8^6 \cdot 0.2 + \binom{7}{5} \cdot 0.8^7 \approx 85.2\%$$

(b) Es gibt zwei Fälle - *drei rote und eine weisse Kugel* oder *vier rote Kugeln.* 2 P

$$p = p(3r, 1w) + p(4r) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{15}{4}} = \frac{54}{91} \approx 59.34\%$$

(c) Ist x die Anzahl der weissen Kugeln, so ist $16 - x$ die Anzahl der roten Kugeln.

$$\begin{aligned} \frac{\binom{x}{2} \cdot \binom{16-x}{0}}{\binom{16}{2}} &= 0.55 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{16} \cdot \frac{x-1}{15} = 0.55 \\ \frac{x(x-1)}{2} &= 66 \\ x^2 - x - 132 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm 23}{2} = 12 \text{ oder } -11 \end{aligned}$$

1P

Also sind 12 Kugeln weiss. 1 P

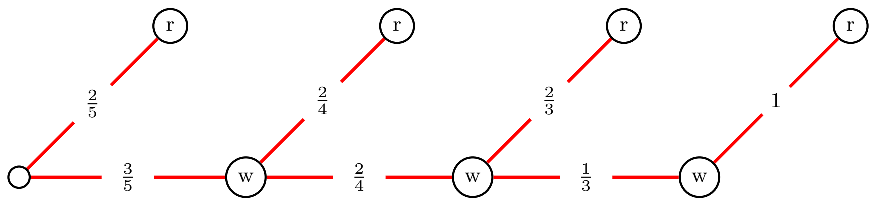
(d) Man fragt nach der nötigen Anzahl Kugeln, damit die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine rote Kugel zu ziehen, kleiner als 0.1% ist.

$$\begin{aligned} p(\text{keine rote Kugel}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n &< 10^{-3} \\ n \cdot \log \tfrac{2}{3} &< -3 \\ n &> \frac{-3}{\log 2/3} \approx 17.04 \end{aligned}$$

1P

Man benötigt also mindestens 18 Kugeln. 1 P

(e) Das folgende Diagramm gibt einen Überblick über die möglichen Ziehungen.



Die Zufallsvariable X = *Anzahl der Ziehungen* hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_k	1	2	3	4
p_k	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

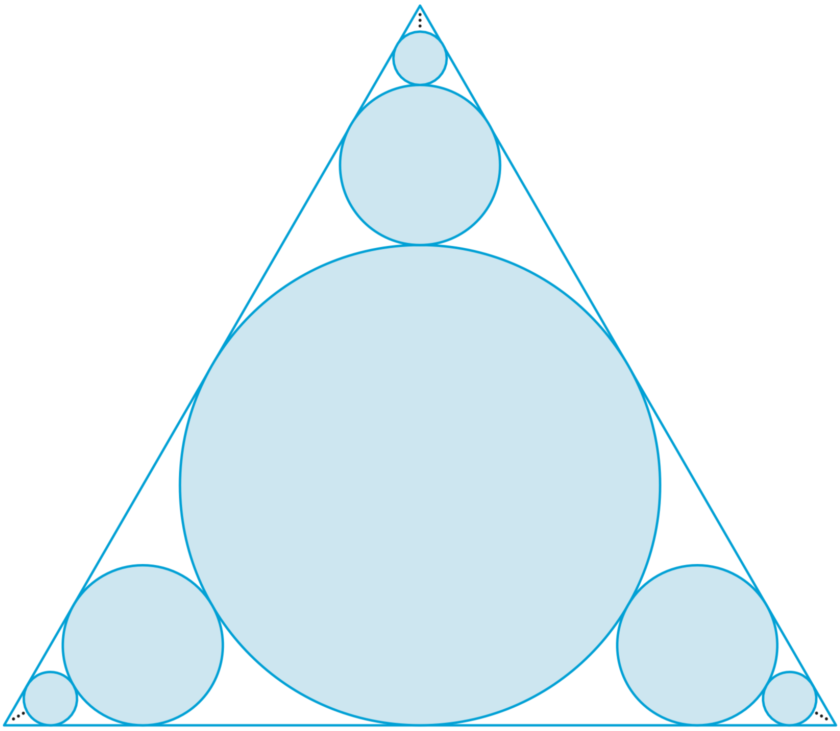
Die zu erwartende Anzahl der Ziehungen ist also

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k = 2$$

2 P

5. **[8 Punkte]**

In der Figur nähern sich jeweils unendlich viele Kreise den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1 an. Jeder Kreis berührt dabei den Vorgängerkreis und zwei der Dreiecksseiten.



(a) **[3 Punkte]**

Der zentrale Kreis, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt des Dreiecks ist, habe den Radius r_1, die daran anschliessenden Kreise haben Radius r_2, r_3 und so fort. Bestimmen Sie r_1 und r_2 und begründen Sie dann, dass allgemein gilt

$$r_n = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left. \frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

(b) **[2 Punkte]**

Ein Kreis aus der obigen Figur mit Radius r_n habe Flächeninhalt A_n. Zeigen Sie, dass gilt

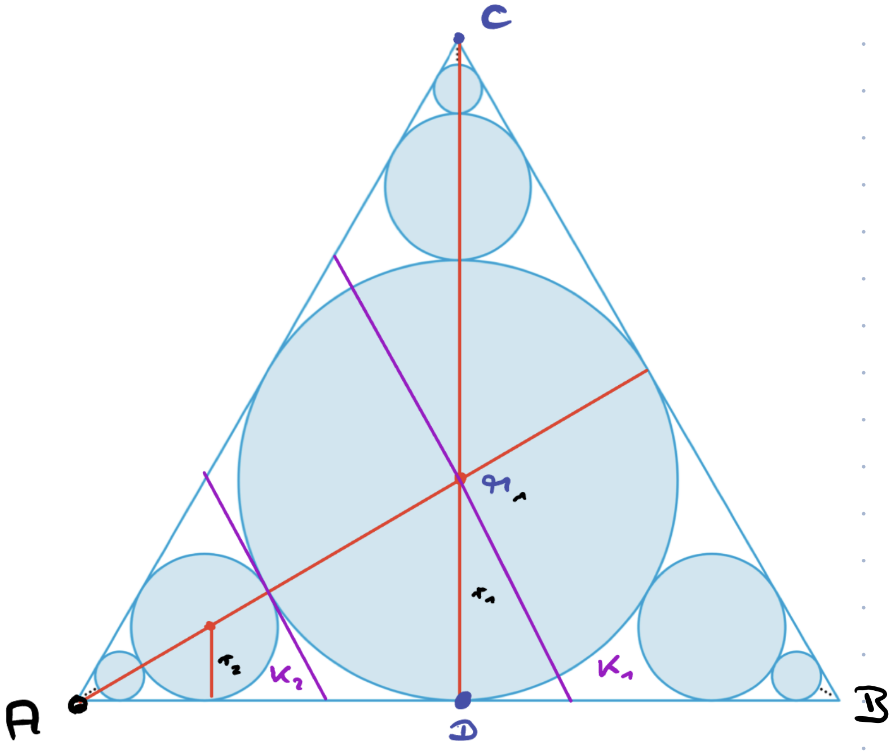
$$A_n = \frac{\pi}{12} \cdot \left. \frac{1}{9} \right)^{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

(c) **[3 Punkte]**

Welchen Flächeninhalt hat die (blauschattierte) Menge, die sich aus allen Kreisen zusammensetzt? Bitte geben Sie das exakte Ergebnis an.

Lösung:

(a) Man beobachtet, dass der Mittelpunkt M_1 des Dreiecks gleichzeitig Schwerpunkt ist.



Da die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, gilt für r_1 nach dem Schwerpunktsatz $r_1 = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 1 P

Eine zentrische Streckung S mit Streckfaktor $k = \frac{1}{3}$ und Streckzentrum A bildet den zentralen Kreis K_1 auf K_2 ab. Damit gilt $r_2 = r_1 \cdot k = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{3}$. 1 P

Iteriertes Anwenden der zentrischen Streckung S ergibt $r_3 = r_2 \cdot k = r_1 \cdot k^2$ und allgemein $r_n = r_1 \cdot k^{n-1}$. Das ist die zu zeigende Formel

$$r_n = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left.\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

1 P

(b) Der zentrale Kreis K_1 hat den Flächeninhalt $A_1 = \pi r_1^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{12}$. 0.5 P

Anwenden von S vermindert den Flächeninhalt der Kreise mit dem Faktor $k^2 = \frac{1}{9}$.

Damit gilt $A_2 = A_1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{9}$ und allgemein

$$A_n = \frac{\pi}{12} \cdot \left.\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

1.5 P

(c) Es sei S_n die Summe der Flächen aller Kreise vom Radius maximal r_n. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
S_n &= A_1 + 3A_2 + 3A_3 + \cdots + 3A_n \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\
&= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \left. 1 + \frac{1}{9} + \left. \frac{1}{9}\right)^2 + \cdots \left. \frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) \\
&= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1-(1/9)^n}{1-1/9} \\
&= -\frac{\pi}{6} + \frac{9\pi}{32} - \frac{9}{8} \left. \frac{1}{9}\right)^n
\end{aligned}
$$

2 P

Die Summe S aller Kreisflächen ist dann

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{\pi}{6} + \frac{9\pi}{32} = \frac{11\pi}{96}$$

1 P